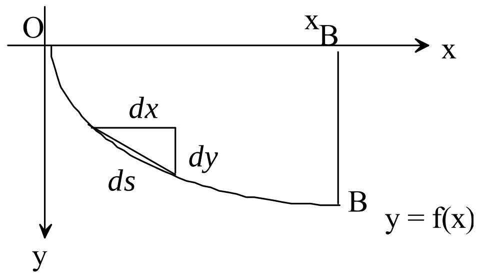
## LA BRACHISTOCHRONE, OU LES GRANDS QUI JOUENT AU TOBOGGAN

On lâche une bille au sommet d'un toboggan situé dans un plan vertical. Quelle forme doit avoir le toboggan pour que la bille arrive le plus vite possible en bas ; sachant qu'elle est soumise à la seule force de gravitation et qu'elle glisse sans frottement ?
La réponse est classique, c'est un arc de cycloïde.
La courbe qui minimalise ainsi le temps de parcours s'appelle une brachistochrone (du grec *brachistos* = le plus court et *chronos* = temps).
Oui mais un élève de terminale ignore tout cela, pour ne rien dire du calcul des variations qui permet de trouver la cycloïde !
L'activité proposée consiste à tester diverses courbes pour essayer d'obtenir un temps de parcours minimal.
Tout de suite se pose un premier problème.

### Comment calculer le temps de parcours le long d'une courbe ?

Un rapide topo permet de montrer que le temps de parcours est donné par : $\boxed{T = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx}$

Plus précisément : On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}\,; \vec{j})$,
$\vec{j}$ orienté vers le bas, donc dans le sens de l'attraction terrestre.
La courbe a pour équation *y = f(x)*.
On prend O comme point de départ.




$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx^2 = (1 + y'^2)dx^2$

Où $y'$ désigne la dérivée de $y$ par rapport à $x$.

Mais d'après le théorème de l'énergie cinétique on a:
$\frac{1}{2} mv^2 = mgy$ (travail du poids) d'où $v^2 = 2gy$

Donc $ds^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] dt^2 = v^2\, dt^2 = 2gy\, dt^2$

Alors $2gy\, dt^2 = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx^2$ d'où $dt^2 = \frac{1+y'^2}{2gy}$ et $T = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$

Le problème est, théoriquement, de trouver *y* qui minimalise T. Voilà une équation qui a de quoi laisser dubitatif l'élève tout juste débutant en calcul intégral et équations différentielles !

On peut aussi se dispenser du topo et donner directement la formule comme une boite noire.

### Vers le toboggan optimal

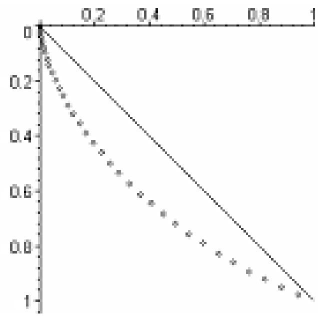
A défaut de résoudre l'équation les élèves peuvent maintenant tester différentes courbes .

Dans un premier temps les élèves prennent pour B le point de coordonnées (1 ;1) On verra que ce n'est l'idée la plus simple

Les courbes imaginées par les élèves vont être présentées dans l'ordre chronologique où ils les ont trouvées.

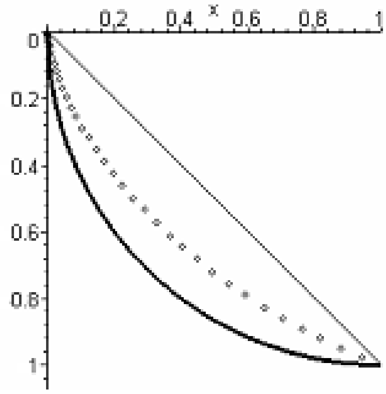
Sur les courbes on aura, la cycloïde en pointillés, la courbe précédente et en trait fin et la courbe testée en trait gras.
Pour pouvoir comparer, disons tout de suite que le temps est de 0,583 s. pour la cycloïde.
On prendra $g = 9.81$.

**Idée 1 :** La droite d'équation $y = x$.



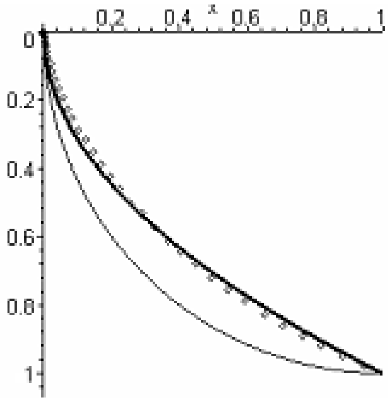

On trouve T = 0.638

**Idée 2 :** Le quart de cercle d'équation $y = -\sqrt{2x - x^2}$ , histoire de prendre de la vitesse au départ.



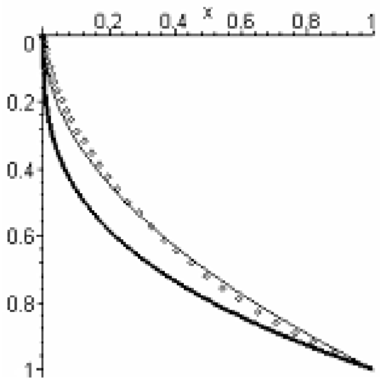

On trouve T = 0,592

**Idée 3 :** Une branche de parabole, verticale au départ, $y = -\sqrt{x}$ , toujours un départ vertical.




On trouve T = 0,584

**Idée 4 :** Une racine cubique ( $y = -\sqrt[3]{x}$ )
Puisque $\sqrt{x}$ a l'air de donner un bon résultat ; on aura là une pente encore plus raide au départ.

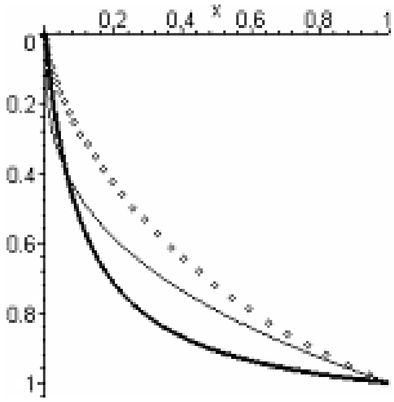



On trouve T = 0,592

La pente très raide au départ est une fausse bonne idée ; et toutes les tangentes verticales ne se valent pas !

**Idée 5 :** Une branche d'hyperbole, raide au départ. (On ne change pas une équipe qui perd !)

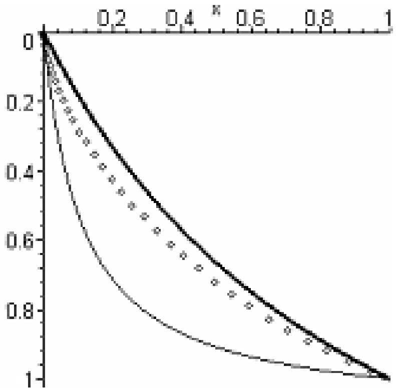
$$y = \frac{-10x}{9x+1}$$




On trouve T = 0.62

**Idée 6 :** Une branche d'hyperbole moins raide au départ

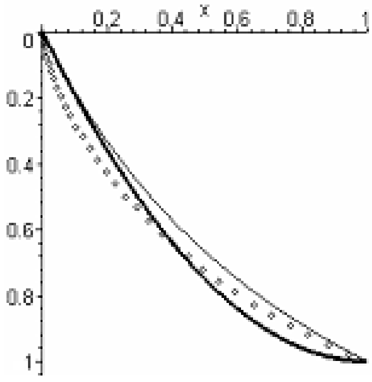
$$y = \frac{-2x}{x+1}$$




On trouve T = 0.613

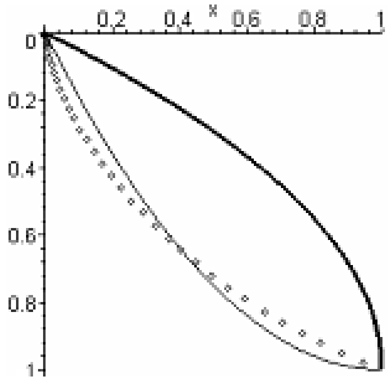
Quand on vous dit qu'il ne sert à rien de foncer dès le départ !

**Idée 7 :** Une branche de parabole horizontale à l'arrivée $y = x^2 - 2x$




On trouve T = 0,595

**Idée 8 :** Une branche de parabole verticale à l'arrivée $1-\sqrt{1-x}$
Histoire de mettre La Fontaine en défaut ; et de voir si partir lentement et arriver vite permet d'être rapide.

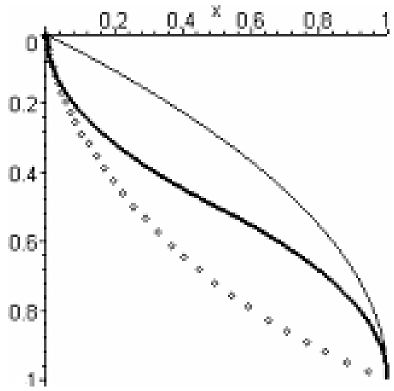



On trouve T = 0,776

La Fontaine avait raison

**Idée 9 :** Deux branches de parabole, avec départ et arrivée verticaux et un raccordement sans à coups au milieu du trajet (donc de classe C1),

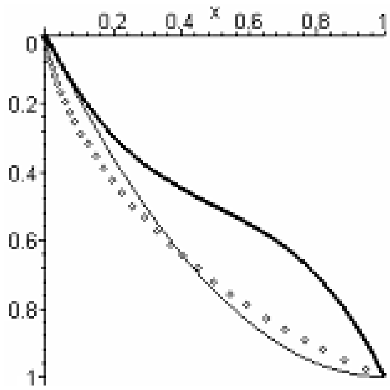
$$\begin{cases} y=-0{,}5\sqrt{x} & sur \quad [0;\quad 0{,}5] \\ y=1-0{,}5\sqrt{1-x} & sur \quad [0{,}5;\quad 1] \end{cases}$$




On trouve T = 0,613

Il ne sert à rien, ni de partir, ni d'arriver vite. Mais cet exemple montre aux élèves qu'il n'y a pas que les fonctions affines qui puissent être définies par morceaux.

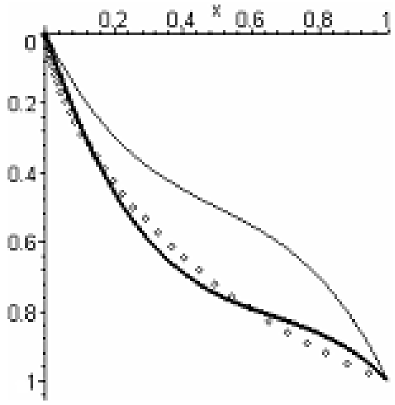
**Idée 10 :** Une cubique avec son centre de symétrie au milieu du trajet $y=2x^3-3x^2+2x$.
Subtil compromis entre un départ pas trop raide, mais un peu tout de même, et ne pas arriver à l'horizontale.




On trouve T = 0,615

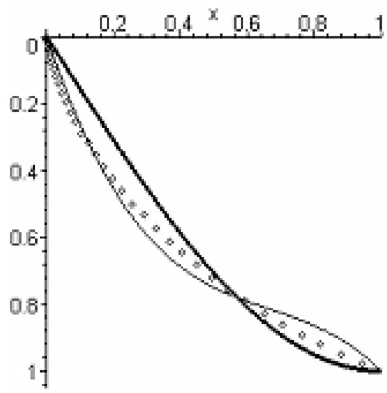
Il importe de souligner qu'une bonne partie de l'intérêt de cette activité réside dans la recherche faite par les élèves pour trouver les équations de ces courbes ayant des propriétés prédéfinies. En classe, lors d'une étude de fonction, ils ont l'habitude de la démarche inverse.
Ici, par exemple, on a imposé une pente égale à 2 au départ et à l'arrivée et le point d'inflexion au milieu.

**Idée 11 :** Une cubique plus pentue au départ et à 45° à l'arrivée $y = 2x^3 - 4x^2 + 3x$



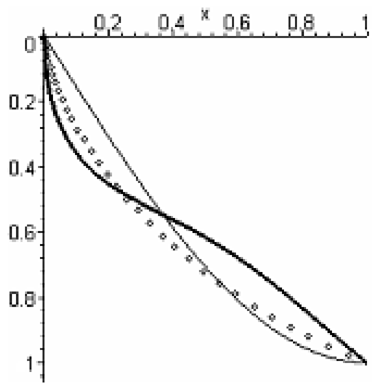

On trouve T = 0,59

**Idée 12 :** Une sinusoïde $y = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$



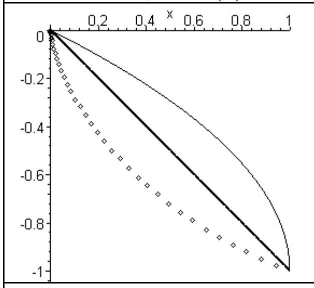
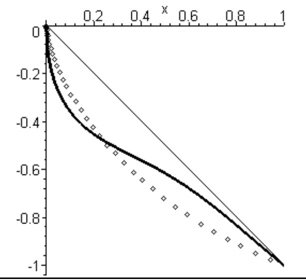
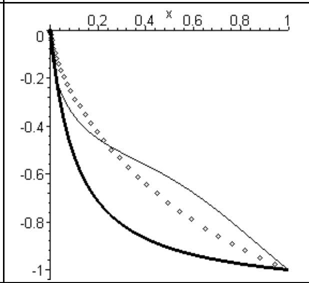
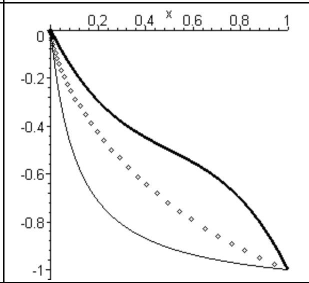
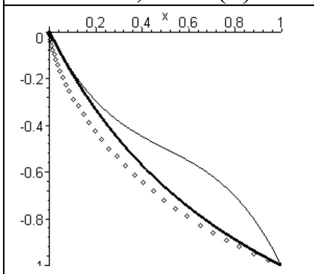
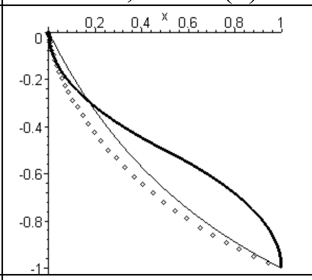
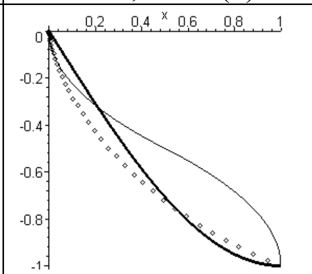
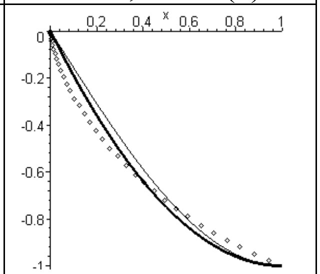
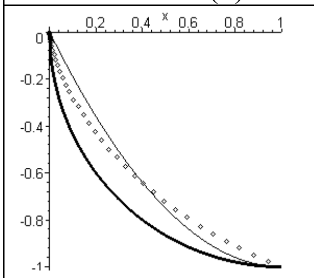
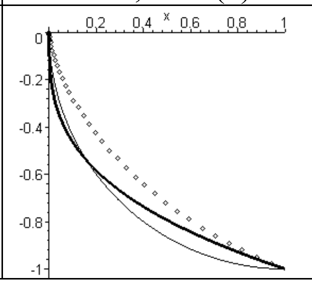
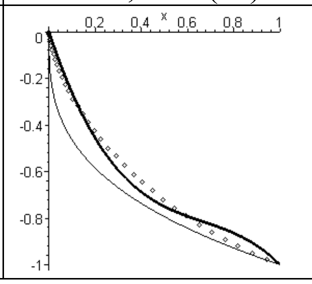
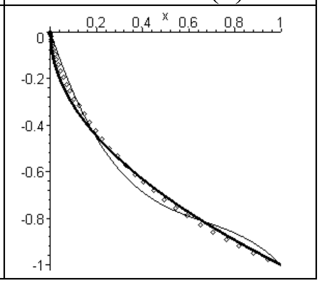

On trouve T = 0,602

**Idée 13 :** Un mélange de parabole et de sinusoïde $y = -\sqrt{2x - x^2} + \frac{\sin(\pi x)}{4}$




On trouve T = 0,631

Voici un tableau récapitulatif, par ordre de temps décroissant.

| T = 0,776 (8)<br>et T=0,638 (1) | T = 0,631 (13) | T = 0,62 (5) | T = 0,615 (10) |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| T = 0,613 (6) | T = 0,613 (9) | T = 0,602 (8) | T = 0,595 (7) |
|  |  |  |  |
| T = 592 (2) | T = 0,592 (4) | T = 0,59 (11) | T = 584 (3) |
|  |  |  |  |

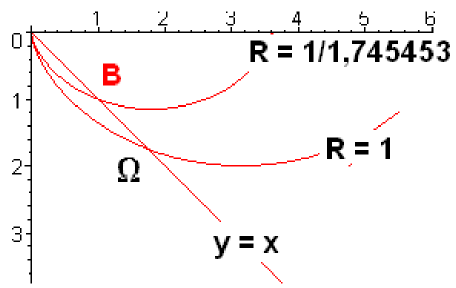
Ayant épuisé leur bestiaire de fonctions, et se rendant bien compte que cette quête peut être sans fin. Les élèves me demandent s'il existe une solution optimale.
Oui bien sûr, une cycloïde. Mais il reste à trouver une cycloïde passant par les deux extrémités de la trajectoire.

**Recherche de la cycloïde**

Une cycloïde $C_R$ a pour représentation paramétrique (1) $\begin{cases} x = R(t - \sin(t)) \\ y = R(1 - \cos(t)) \end{cases}$

Les courbes $C_R$ se déduisent, par homothétie, de celle obtenue pour R = 1. Il faut donc trouver la valeur de R pour laquelle $C_R$ passe par le point B(1 ;1).
On cherche le point Ω, intersection de la droite d'équation y = x et de $C_1$.
En se faisant un peu prier Maple finit par donner la solution non triviale, $t_\omega \approx 2{,}4120111$

D'où Ω(1,745453 ;1,745453) Il faut donc prendre R = $\dfrac{1}{1.745453}$

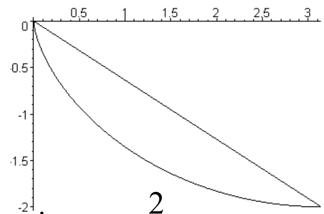


**Calcul du temps pour la cycloïde**

L'intégrale permettant de calculer le temps de parcours utilise l'équation cartésienne de la courbe. Or la cycloïde est connue par sa représentation paramétrique.
On peut exprimer $x$ en fonction de $y$ ( $x = A\cos(1-y) - \sqrt{2y-y^2}$ ) mais c'est le contraire qu'il faudrait pour calculer l'intégrale.
En posant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ et en admettant que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \times \dfrac{dt}{dx}$ je leur montre comment s'en sortir.
On a donc les équations (1) avec $R = \dfrac{1}{1.745453}$ et ω = 2,412001

$$T = \int_0^{1_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx = \int_0^{\omega} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}{2g(1-\cos(t))}}\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\omega} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{R\sin(t)}{R(1-\cos(t))}\right)^2}{2gR(1-\cos(t))}}R(1-\cos(t))dt = \int_0^{\omega} \sqrt{\frac{R}{g}}dt = 0.583$$

**Un beau toboggan**



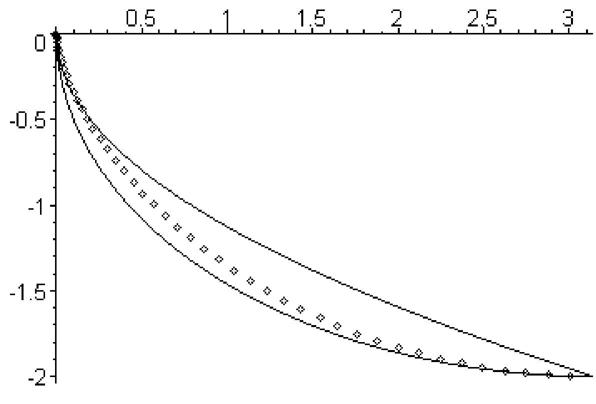
Naturellement les élèves se posent la question suivante.
Qui l'emporte entre une demi arche de cycloïde et un segment de droite ?
On part verticalement et on arrive en douceur horizontalement.
Cette fois ci on va du point A(0 ; 0) au point B(π ; 2) et la droite a pour équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$ .

On trouve pour la cycloïde, T = $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1}{g}}dt$ = <u>**1,0025**</u>

Et pour la droite **T = 1,1877.**
Mais une ellipse permet aussi de partir verticalement et d'arriver horizontalement. Ils décident d'étudier ce cas ; ce qui avait déjà été fait dans l'étude précédente avec le quart de cercle.
L'ellipse a pour équation $\dfrac{(x-\pi)^2}{\pi^2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. On trouve **T = 1,0068**.
Dans l'étude précédente c'était la parabole qui approchait le mieux la cycloïde. Qu'en est-il ici ?

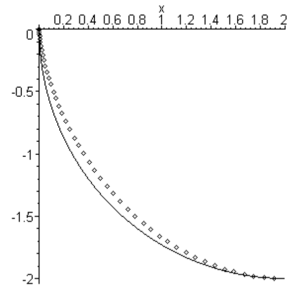
La parabole a pour équation $y = \dfrac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ et on trouve **T = 1,01286**.

Maintenant c'est l'ellipse qui est plus rapide que la parabole. Mais là encore on observe que l'ellipse a, au départ, une pente plus raide que la cycloïde. Partir vite ne garantit pas d'arriver vite, partir lentement non plus d'ailleurs. L'optimum est entre les deux.



## A armes égales

A ce stade les élèves veulent tester des courbes comparables. A savoir un départ vertical et une arrivée horizontale. Le quart de cercle est un parfait candidat mais la demi arche de cycloïde ne rentre pas dans ce carré. Qu'à cela ne tienne ; on va un peut la tasser et voir si elle reste gagnante.
On va donc déformer la cycloïde $C_1$ par l'affinité orthogonale de base l'axe des ordonnées et de rapport $\frac{2}{\pi}$. Elle s'inscrira ainsi dans un carré de côté 2.
La courbe C' ainsi obtenue coïncide, en ses extrémités, avec le quart de cercle et y possède les mêmes tangentes.




C' est définie par $\begin{cases} X = \frac{2}{\pi}(t - \sin(t)) \\ Y = 1 - \cos(t) \end{cases}$

On trouve pour le quart de cercle **T = 0,8365** et pour C' on a **<u>T = 0,8301</u>**
Même ainsi déformée la cycloïde reste championne, mais de peu.

## Et quand la bille remonte ?

La cycloïde est-elle toujours gagnante si on utilise aussi la partie qui remonte ?
On choisit, par exemple, une droite de pente 0,25.
Elle va recouper la cycloïde au point d'abscisse 5,32
Pour la cycloïde on trouve **<u>T = 1,34</u>** et pour la droite **T = 2,15**.
Si la pente de la droite est encore plus faible ; l'écart va s'accroître puisqu'à la limite, avec une droite horizontale, il faudrait un temps infini. Maintenant ne rêvons pas ; cette étude est une approximation de la réalité ; puisqu'on ne tient pas compte des frottements. Bien entendu la bille ne va jamais remonter jusqu'à l'autre extrémité de l'arche de cycloïde.

## La tautochronie

La cycloïde a la propriété suivante bien connue. Qu'on lâche la bille n'importe où sur la cycloïde, elle mettra le même temps pour arriver en bas de la demi arche.

C'est-à-dire $(\forall X_0 \in [0;\pi[)$ $\quad T = \int_{X_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{g}}$

Une manière de montrer la tautochronie ; c'est de lâcher une bille sur chaque branche de la cycloïde, à une hauteur différente, et de voir qu'elles arrivent en même temps en bas.

## D'un point de vue pratique

Bien évidemment il fallait à un moment de cette étude passer à la réalisation concrète.
Au fil du temps, trois « billodromes » ont été construits.
Le premier, de 50 cm de long, avec trois pistes, une rectiligne et deux demi arches de cycloïde (pour tester la tautochronie) .
Le deuxième, sur le même modèle, mais de 1,20 m de long.
Le troisième avec une arche de cycloïde complète et une réglette en U dont on pouvait faire varier l'inclinaison.

Les autres courbes n'ont pas été réalisées. On voit ici la supériorité des mathématiques sur la scie sauteuse.
Il y a quatre façons de voir ce qui se passe ;

- visuellement, même sur le petit modèle, mais c'est mieux sur le grand.
- Acoustiquement, on place un taquet en bois à l'extrémité des pistes. Pour tester la tautochronie on entend bien un seul son à l'arrivée.
- Manuellement, on place tout simplement un doigt à chaque extrémité des pistes.
- Electroniquement, il faut demander gentiment aux physiciens de vous prêter des capteurs.

**Compléments et perspectives**
Le problème de la brachistochrone fut résolu en 1697 par Jean Bernoulli. A l'époque le calcul des variations n'était pas connu. Bernoulli fit l'analogie avec un rayon lumineux traversant un succession de fines lames parallèles de densités différentes, il discrétise le problème. [1][3] [4].

Au début de l'article il est dit que la bille glisse sans frottements. On objectera qu'une bille roule. Primo le problème devient plus compliqué car il faut tenir compte de l'énergie cinétique de rotation ; secundo, quand la pente est quasi verticale il n'est pas certain que la bille roule. Donc on en restera au glissement sans frottements.

Un prolongement pourrait être d'imposer une pente au départ. Dans le cas, où il n'existe pas de cycloïde passant par les extrémités de la trajectoire et ayant une pente donnée à l'origine, qu'elle est la brachistochrone ?

**Références**
[1] Brachistochrone la naissance du calcul des variations   P. Audin Quadrature N°1 nov.déc 1989 (p. 47-84)
[2] www.chronomath.com  chercher brachistochrone
[3] http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_brachistochrone (avec une animation)
[4] http://www.chez.com/rpauchet/lapageTIPE/TIPEkevin/TIPEbrach/brach.htm
[5] http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/92049052.pdf